Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Ottobre 1940 - Serie IV, vol. XX, n. 4 (pagg. 246-249)

CARLO FELICE MANARA

Introduzione della funzione esponenziale mediante generazione meccanica della spirale logaritmica

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Ottobre 1940 - Serie IV. vol. XX, n. 4 (pagg. 246-249)

§ 1. – È noto dalle prime applicazioni geometriche del calcolo differenziale che la spirale logaritmica

$$\rho = e^{a\theta}$$

ha la proprietà che la tangente in ogni suo punto forma un angolo costante col raggio vettore; basta ricordare che, detto φ l'angolo del raggio vettore e della tangente, si ha

$$\cot \varphi = \frac{d\rho}{\rho \cdot d\theta}. \tag{1}$$

Viceversa ponendo nella formula precedente $\cot \varphi = a$ (cost.) e integrando l'equazione differenziale che ne risulta

$$\frac{d\rho}{\rho} = a \cdot d\theta \tag{2}$$

si ottiene $\log \dfrac{\rho}{\rho_0} = a\theta$, e infine

$$\rho = \rho_0 \, e^{a\theta}.$$

§ 2. – Semplici mezzi meccanici, per es. un integrafo polare di Pascal [1], permettono di tracciare facilmente la curva integrale della (2). Ma non è necessario ricorrere al calcolo differenziale per dedurre le proprietà della funzione esponenziale attraverso l'integrazione della (2); a queste proprietà si

---

[1] Vedi Pascal: *I miei integrafi per equazioni differenziali.*

può arrivare molto semplicemente solo in base a considerazioni geometriche fondate sulle caratteristiche di un qualunque strumento capace di tracciare la curva integrale della (2), ossia capace di tracciare una curva le cui tangenti formino in ogni punto un angolo costante col raggio vettore.

Un simile strumento si può ridurre, nelle sue linee essenziali, ad un braccio b che ruoti attorno ad un perno O perpendicolare al piano del disegno e lungo cui scorra un corsoio C unito ad una rotella R che rotola sul piano del disegno e giace in un piano ad esso perpendicolare e formante un angolo costante col braccio b.

La rotella R disegnerà, al ruotare di b attorno ad O ed al conseguente scorrere di C lungo b, una curva K la cui tangente è l'intersezione del piano del disegno con quello della R stessa e forma quindi un angolo costante col raggio vettore.

Consideriamo due archi $\widehat{P_1P_2}$ e $\widehat{P_3P_4}$ della nostra curva per cui sia $P_1\widehat{O}P_2 = P_3\widehat{O}P_4 = \theta$. Facendo ruotare il settore P_3OP_4 fino a far coincidere i raggi vettori $\rho_3\rho_4$ con $\rho_1\rho_2$ rispettivamente, i due archi $\widehat{P_1P_2}$, $\widehat{P_3P_4}$ risulteranno omotetici rispetto al centro O.

Per dimostrarlo osserviamo anzitutto che la forma della nostra curva K non dipende per nulla dal diametro della rotella R ma solo dall'angolo (costante) formato dal piano della R col braccio b. Onde se noi trasformassimo tutto il complesso del piano del disegno e dello strumento con una omotetia di centro O la nuova curva ottenuta coinciderebbe con la K a meno di una opportuna rotazione attorno ad O. Infatti l'omotetia varierà nello stesso rapporto tutte le dimensioni delle parti dello strumento ma l'unico effetto che potrà avere su di esso e che sia sensibile ai fini della descrizione della curva sarà quello di far variare la distanza del corsoio C, e quindi della rotella ad esso unita, da O; effetto che, prima dell'omotetia, si ottiene sullo strumento originale con una rotazione di opportuna ampiezza del braccio b attorno ad O [2].

---

[2] Il calcolo conferma i risultati ottenuti ora con considerazioni geometriche. Detti ρ e ρ' i raggi vettori in due punti PP' dei due archi, allineati con O, prendendo io stesso $d\vartheta$ per ambedue si ha dalla (1)

$$\cot\varphi = d\rho/\rho\cdot d\vartheta = d\rho'/\rho' d\vartheta$$

da cui $d\rho/\rho = d\rho'/\rho'$ e integrando $\rho'/\rho = \text{cost.}$

Deduciamo quindi

$$\rho_1/\rho_2 = \rho_3/\rho_4 .$$

In parole:

Il rapporto di due raggi vettori è funzione solo dell'angolo θ tra essi compreso.

Fissando un raggio vettore ρ_0 iniziale da cui contare le anomalie

(3) $$\rho = \rho_0 f(\theta).$$

Per studiare le proprietà della funzione f consideriamo tre raggi vettori ρ_0, ρ_1, ρ_2 e siano θ_1 e θ_2 gli angoli compresi tra $\rho_0\rho_1$ e tra $\rho_1\rho_2$ rispettivamente.

I rapporti ρ_1/ρ_0 e ρ_2/ρ_1 sono, abbiamo detto, funzioni dei soli angoli θ_1 e θ_2

$$\rho_1/\rho_0 = f(\theta_1); \quad \rho_2/\rho_1 = f(\theta_2)$$

come pure il rapporto ρ_2/ρ_0 è funzione del solo angolo $\theta_1 + \theta_2$.

$$\rho_2/\rho_0 = f(\theta_1 + \theta_2)$$

ma è

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

e quindi

(4) $$f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) \cdot f(\theta_2).$$

§ 3. – Ammettiamo di non conoscere dall'analisi la funzione esponenziale. Fissata come origine delle anomalie il raggio vettore ρ_0 che coincide con l'unità di misura dei segmenti, ossia fatto nella (3) $\rho_0 = 1$, le proprietà che l'intuizione attribuisce ad una curva descritta con continuità mediante uno strumento ci permettono di affermare che nella nostra curva il raggio vettore è funzione ovunque continua e sempre crescente (o sempre decrescente) dell'anomalia. Per cui è possibile far corrispondere biunivocamente ad ogni raggio vettore un'anomalia che chiameremo suo « logaritmo » che ha la proprietà fondamentale espressa in formule dalla (4):

Il logaritmo di un prodotto vale la somma dei logaritmi dei fattori.

Il nostro integrafo ci permette di dare una chiara esemplificazione geometrica (che non è forse priva di interesse didattico) della proprietà che rende così utile l'impiego dei logaritmi nei calcoli: quella di far dipendere la ricerca del prodotto di due numeri da quella della somma di due altri in corrispondenza biunivoca coi primi.

§ 4. – È noto il procedimento che permette di riconoscere la forma analitica esplicita di una funzione f che soddisfi alla (4): nella (4) stessa fatto $\theta = 0$ si ottiene $f(0) = 1$. Posto $f(1) = a$, si ottiene $f(2) = a^2 \ldots . f(n) = a^n$, e, per qualunque valore razionale m/n di θ si ha

$$f(m/n) = a^{m/n}.$$

Ammessa la continuità di f si giunge a scrivere per ogni valore reale di θ

$$f(\theta) = a^{\theta}.$$

Nel nostro caso la continuità è assicurata, come abbiamo osservato, dalle stesse proprietà intuitive della curva descritta meccanicamente; l'analisi ora fatta ci permette così di riconoscere che il nostro « logaritmo » coincide con la solita funzione logaritmo dell'analisi per ogni valore di θ.

Abbiamo così ottenuto un mezzo per definire geometricamente la potenza con esponente reale qualunque di un segmento assegnato, solo ammettendo nota la teoria della misura degli angoli; se infatti ρ è il raggio vettore che corrisponde all'anomalia θ, la potenza con esponente reale α qualunque di ρ sarà da noi definita come il raggio vettore che corrisponde all'anomalia $\alpha \cdot \theta$. È facile vedere che la nostra definizione coincide, quando α sia intero, con quella data dal procedimento geometrico elementare per la costruzione delle successive potenze di un segmento mediante la successiva costruzione di triangoli simili.

Coop. Tip. Azzoguidi - Bologna